§ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ HURWITZ

Θεωρούμε το συνεκτικό χώρο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\langle (x_1, \dots, x_1), (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Αναρωτιόμαστε αν μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή μια πράξη
$* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η οποία θα πληρεί τα παρακάτω αξιώματα

Αξίωμα 1

Για κάθε $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει $\vec{x} * (\vec{y} + \vec{z}) =$
$\vec{x} * \vec{y} + \vec{x} * \vec{z}$
$(\vec{y} + \vec{z}) * \vec{x} = \vec{y} * \vec{x} + \vec{z} * \vec{x}$

Αξίωμα 2

Για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ να ισχύει
$\lambda (\vec{x} * \vec{y}) = (\lambda \vec{x}) * \vec{y} = \vec{x} * (\lambda \vec{y})$

Αξίωμα 3

Για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει $\| \vec{x} * \vec{y} \| = \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

ΕΡΩΤΗΜΑ

Για ποιες τιμές του $n \geq 1$, μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού $* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που να πληρεί τα παραπάνω αξιώματα;

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Το εξωτερικό γινόμενο $\times\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ δεν είναι τέτοια πράξη, αφού δεν ισχύει το 3º Αξίωμα, αφού $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ HURWITZ

Οι μόνοι ευκλείδειοι χώροι που δέχονται πράξη πολλαπλασιασμού, που να πληρεί τα αξιώματα (1), (2), (3) είναι $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^8$. Δηλαδή, $n\{1, 2, 4, 8\}$

Ας δούμε, ποιες είναι οι πράξεις πολλαπλασιασμού σε αυτούς τους χώρους

Ⓐ Στο $\mathbb{R}$ είναι ο κανονικός πολλαπλασιασμός

Ⓑ Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Η πράξη πολλαπλασιασμού είναι ο μιγαδικός πολλαπλασιασμός

Δηλαδή, $(x_1 + iy_1) * (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

ή ισοδύναμα, $\vec{x} = (x_1, y_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2)$

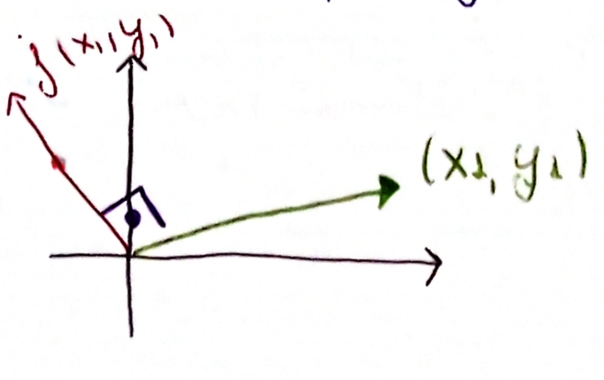
$\vec{x} * \vec{y} = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Μπορείτε να ελέγξετε ότι τα αξιώματα 1, 2, 3 ικανοποιούνται

Αξίζει να αναφέρουμε την γραμμική απεικόνιση

$j\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $jz = iz$

ή ισοδύναμα $j: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $j(x_1, y_1) = (-y_1, x_1)$



Παρατηρούμε ότι

i) $j^2 = J \circ J = -Id$

ii) $\langle j\vec{x}, j\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

iii) $\langle j\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$

iv) $\langle j\vec{x}, \vec{y} \rangle = -\langle \vec{x}, j\vec{y} \rangle$

Γ Τετράνια ≡ Quaternions

Ταυτίζουμε τον $\mathbb{R}^4$ με τον

$$Q = \{ a_0 + i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3 : a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

όπου i_1, i_2, i_3 είναι φανταστικοί αριθμοί με

$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1$

$i_1 \cdot i_2 = i_3 = -i_2 * i_1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η πράξη πολλαπλασιασμού δεν είναι μεταθετική, δηλαδή $p * q \neq q * p$.

2. Θεωρούμε τις 3 γραμμικές απεικονίσεις $j_k : Q \to Q$ με τύπο $j_k p = i_k p$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι j_1, j_2, j_3 πληρούν τις ιδιότητες (i), (ii), (iii), (iv) του μιγαδικού j.

Δ Οκτώνια ≡ Octonions

$$O = \{ a_0 + i_1 a_1 + \dots + i_7 a_7 : a_0, \dots, a_7 \in \mathbb{R} \}$$

όπου οι φανταστικοί αριθμοί $i_1, \dots, i_7$ πληρούν

i) $i_n^2 = -1$

ii) $i_{n+1} \, i_{n+2} = i_{n+4} = -i_{n+2} \, i_{n+1}$

$i_{n+2} \cdot i_{n+4} = i_{n+1} = -i_{n+4} \, i_{n+2}$

$i_{n+4} \, i_{n+1} = i_{n+2} = -i_{n+1} \, i_{n+4}$

όπου οι δείκτες n είναι πολλαπλάσια του 2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Έχει χαθεί η προσεταιριστικότητα.
Δηλαδή, $p_1 * (p_2 * p_3) \neq (p_1 * p_2) * p_3$

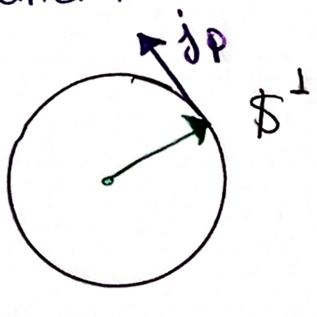
2. Και πάλι οι γραμμικές απεικονίσεις $j_k p = i_k p$ πληρούν τις 4-ιδιότητες που πληρεί ο μιγαδικός j.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Στις σφαίρες $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ και $S^7 \subseteq \mathbb{R}^8$ υπάρχουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία, μέτρου 1 παντού ορισμένα, που σε κάθε σημείο αποτελούν βάση του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα πεδία αυτά σε ένα σημείο p της σφαίρας ορίζονται ως $j_k p$ όπου j_k είναι οι γραμμικές απεικονίσεις που ορίσαμε παραπάνω.



Αυτό συμβαίνει για κάθε σημείο

Ορισμος

Ένα διαφορίσιμο πολύπτυγμα M^m ονομάζεται παραλληλίσιμο όταν υπάρχουν διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\{E_1, \dots, E_m\}$ που σε κάθε σημείο $p \in M^m$ ορίζουν βάση του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου T_pM^m

Θεωρημα Bott-Milnor

Οι μόνες παραλληλίσιμες σφαίρες είναι S^1, S^3 και S^7

Γινομενο Lie και Θεωρημα Frobenious

Ορισμος

Έστω X ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο επί ενός πολυπτύγματος $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$. Εαν $f: M^m \to \mathbb{R}$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση, ορίζουμε ως παράγωγο της f στη διεύθυνση X την νέα συνάρτηση $X(f): M^m \to \mathbb{R}$ με τύπο $X(f)(p) := df_p(X_p)$, $p \in M^m$

Παρατηρηση

Ας υποθέσουμε ότι ως προς μια παραμέτρηση $g: U \to M^m$. Τότε το διανυσματικό πεδίο X έχει τοπική παραμέτρηση της μορφής

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_x$$

Σχόλιο 1

Στο προηγούμενο μάθημα είχαμε εισάγει τον συμβολισμό $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$ για τα διανυσματικά πεδία $\frac{\partial g}{\partial x_i}$.

Σύμφωνα με αυτή την σύμβαση

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{g(x)} \quad (*)$$

όπου $a_1, \dots, a_m : U \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις

Σχόλιο 2

Εάν X είναι διανυσματικό πεδίο, όπως παραπάνω και f διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε:

$$(Xf)(g(x)) = \partial f_{g(x)}(X_{g(x)}) \overset{(*)}{=}$$

$$\partial f_{g(x)}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{g(x)} \right) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)\, \partial f_{g(x)}(\partial g_x(e_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(x)$$

Άρα $(Xf)(g(x)) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_i}(x)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω X διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο και f, g διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ταυτότητες

i) $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$

ii) $X(f g) = f X(g) + g X(f)$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δοθέντων διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων X και Y επί του M^m είναι δυνατό ο ορισμός των αναφερθέντων $Y(X(f))$ και $X(Y(f))$. Όμως οι κατασκευές αυτές δεν οδηγούν πάντα στη δημιουργία νέων διανυσματικών πεδίων. Με άλλα λόγια δεν έχει νόημα το διανυσματικό πεδίο XY ή YX

Όμως ισχύει το εξής.

ΛΗΜΜΑ

Εάν X, Y είναι δύο διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία επί του πολυπτύγματος, τότε υπάρχει μονοσήμαντα ορισμένο διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο Z επί του M τ.ω. να ισχύει η ισότητα $Z(f) = (XY - YX)(f)$ $\forall$ διαφορίσιμη συνάρτηση $f: M^m \to \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το πεδίο Z του παραπάνω Λήμματος συμβολίζεται με $[X, Y]$ και ονομάζεται γινόμενο Lie.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ Υποθέτουμε ότι $g: U \to M^m$ μια παραμέτρηση και

$$X = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{και} \quad Y = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Τότε $X(Y(f)) = X\left(\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) =$

$$\sum_{1\le i,j\le m} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_j} +$$

$$\sum_{1\le i,j\le m} a_i b_j \frac{\partial^2 (f\circ g)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Ομοίως, $Y(X(f)) = \sum_{1\le i,j\le m} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_j} +$

$$\sum_{1\le i,j\le m} a_i b_j \frac{\partial^2 (f\circ g)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Συνεπώς, $(XY-YX)(f) = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} (f)$

Επομένως, εάν ένα τέτοιο Z υπάρχει, τότε οφείλει να εκφράζεται με τον παραπάνω τρόπο σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων. Οπότε θα είναι μονοσήμαντα ορισμένο

ΥΠΑΡΞΗ Άλλα ορίζουμε το Z σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων κάνοντας χρήση της τελευταίας έκφρασης. Λόγω μοναδικότητας, προκύπτει ότι το Z είναι καλά ορισμένο σε ολόκληρο το πολύπτυγμα M^m.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν x, y, z είναι διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συναρτήσεις επί του M^m, τότε:

i) $[x,y] = -[y,x]$

ii) $[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x,z] + \mu[y,z]$

iii) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$

iv) $[fx, gy] = fg[x,y] + f(x(g))y - g(y(f))x$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προκύπτει άμεσα με πράξεις στον τύπο ορισμού του γινομένα Lie.

ΘΕΩΡΗΜΑ FROBENIOUS

Ας υποθέσουμε ότι στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$ δίνονται διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία $\{x_1, \dots, x_m\}$, $m<k$, που σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και δημιουργούν έναν υπόχωρο $\mathcal{D}_p = span\{x_1|_p, \dots, x_m|_p\} \subseteq \mathbb{R}^k$

Υποθέτουμε, επίσης ότι $\forall i,j \in \{1,\dots,m\}$ ισχύει ότι $[x_i, x_j] \in \mathcal{D}$. Τότε $\exists$ πολλαπλότητα $M^m \subseteq \mathbb{R}^k$ τ.ω

$T_pM^m = \mathcal{D}_p$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Άρα η απάντηση, στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή του προηγούμενου μαθήματος δεν είναι πάντα θετική.